4 Dérivation

1. Dérivabilité en un point x_0

   Par définition, *f est dérivable en x_0* si $\boxed{x_0 \in D_f \text{ et } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ existe et est finie}}$ (appelé nombre dérivé de f en x_0).

2. Autre définition

   f est dérivable en x_0 équivaut à $\boxed{x_0 \in D_f \text{ et } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = k \text{ existe et est finie}}$

   Autrement dit : $f(x_0 + h) = f(x_0) + kh + k.\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

3. Interprétation géométrique de $f'(x_0)$

- $f'(x_0)$ représente le *coefficient directeur de la tangente* à la courbe au point d'abscisse x_0.

L'équation cartésienne de cette droite est donnée par la formule : $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

- La quantité $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ s'appelle l'accroissement moyen de f en x_0, il représente le coefficient directeur de la sécante à c_f entre les points d'abscisse x_0 et $x_0 + h$.
- Le développement limité de f en x (lorsqu'il existe) peut s'écrire :
  $\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x_0)}$.
  C'est la formule de Taylor-Young appliquée à f en x_0 à l'ordre 1
  Dans certain cas, on doit calculer deux limites, l'une à gauche et l'autre à droite ; donc deux nombres dérivés.

4. Cas de deux nombres dérivés différents

Dans ce cas, la fonction n'est pas dérivable en x_0. Le point $M_0(x_0 ; f(x_0))$ est un *point anguleux*. La courbe admet en ce point deux demi-tangentes.

5. Fonction dérivée

   a) Définition de la dérivée

   Si la fonction est dérivable en tout point appartenant à un intervalle I inclus dans l'ensemble de définition alors tous les nombres dérivés constituent une nouvelle fonction appelée fonction dérivée ou tout simplement dérivée. Notation f ' .

   Donc la dérivée d'une fonction est une fonction.

   b) Théorème

   Toute fonction dérivable est continue. La réciproque est fausse en général

   c) Calcul de la dérivée

   - Tableau des dérivées des fonctions usuelles

f(x)	a	x^n	1/x	$\sqrt{x}$	cosx	sinx	tanx	e^x	lnx
f '(x)	0	nx^{n-1}	$-1/x^2$	$1/2\sqrt{x}$	-sinx	cosx	$1 + \tan^2 x$	e^x	1/x

- <u>Opérations sur les dérivées</u>

f	u + v	u^n	a.u	u.v	1/u	$\sqrt{u}$	ln u	e^u
f ’	u' + v’	$n.u'.u^{n-1}$	a.u’	u’.v + v’.u	-u’/u²	$u'/2\sqrt{u}$	u’ / u	$u'.e^u$

En général : $\boxed{(f \circ g)' = g' . (f' \circ g)}$

Et si f^{-1} est la réciproque de f, on a : $\boxed{(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}}$

- <u>Remarque</u>

Pour une fonction définie par morceaux, il y a plusieurs expressions algébriques. Si le sujet ne demande pas de calculer une à une les dérivées ; il est préférable de présenter le résultat sous forme de tableau.

d) <u>Variations</u>

Le sens de variation respecte le théorème sur les variations d’une fonction.

<u>Théorème</u>

- *f croissante sur I* ⇔ $\boxed{\forall x \in I, f'(x) > 0}$
- *f décroissante sur I* ⇔ $\boxed{\forall x \in I, f'(x) < 0}$
- *f constante sur I* ⇔ $\boxed{\forall x \in I, f'(x) = 0}$

- <u>Tableau de variation</u>

C’est un tableau regroupant les études faites sur les variations d’une fonction. Il doit contenir des valeurs et/ou des limites et a la forme suivante :

x	D_f et toutes les valeurs qui annulent f’(x)
f ‘(x)	signe de f ‘ (x)
f(x)	variation de f

Pour une fonction définie par morceaux : f(x) = $\begin{cases} f_1(x) & si\ x \leq m \\ f_2(x) & si\ x > m \end{cases}$

Le tableau de variation prend la forme suivante :

X	D_f et toutes les valeurs qui annulent f’(x)	
f(x)	$f_1(x)$	$f_2(x)$
f ’(x)	Expression $f'_1(x)$	Expression $f'_2(x)$
f ’(x)	signe de $f'_1(x)$	signe de $f'_2(x)$
f(x)	variation de f_1	variation de f_2