

3 Continuité

1. **Définition** (continuité en un point)

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_0 \in D, \quad \text{donc } f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{array}}$$

2. Pour les fonctions définies par morceaux, il est nécessaire de calculer les limites à gauche et à droite en x_0 . Pour que la fonction soit continue en x_0 , ces deux limites doivent être égales à l'image de x_0 par f .

3. **Continuité sur un intervalle**

a) Définition

La fonction f est continue sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition si et seulement si f est continue en tout a de I .

b) Théorèmes généraux

Soient f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I . Alors :

- * $f + g$ est continue sur I ;
- * kf où k est un réel non nul est continue sur I ;
- * fg est continue sur I ;
- * Si de plus g est non nulle sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I ;
- * Si f est continue sur I et g continue sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

c) Exemples

- Toute fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} ;
- Toute fonction rationnelle ou irrationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

4. **Théorème des valeurs intermédiaires**

a) Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenu dans son ensemble de définition et soient a et b deux réels de I tels que $a < b$. Pour tout réel k entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe au moins un réel $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $]a; b[$.

b) [Théorème du point fixe](#)

Si f est continue sur I et que si $f(I) \subset I$, alors il existe au moins un réel x de I tel que $f(x_0) = x_0$.

Le point d'abscisse x_0 est appelé point fixe.

c) [Théorème de bijection](#)

Si f est continue et strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle $J = f(I)$, alors pour tout k de J , il existe un et un seul x de I tel que $f(x) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans I .

d) [Corollaire](#)

Si f est continue strictement monotone sur $I =]a; b[$ et que $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans I .

e) [Bijection](#)

Si f est continue strictement monotone sur I alors f est bijective de I sur $f(I)$.

L'application réciproque f^{-1} de f est aussi bijective de $f(I)$ sur I et varie dans le même sens que f .

Les courbes C de f et C' de f^{-1} sont, dans le plan muni d'un repère orthonormé, symétriques par rapport à la première bissectrice des axes (la droite d'équation $y = x$).