3 Continuité

1. **Définition** (continuité en un point)

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x_0 \in D, \quad donc\ f(x_0)\ existe \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}}$$

2. Pour les fonctions définies par morceaux, il est nécessaire de calculer les limites à gauche et à droite en x_0. Pour que la fonction soit continue en x_0, ces deux limites doivent être égales à l'image de x_0 par f.
3. **Continuité sur un intervalle**

   a) Définition

La fonction f est continue sur un intervalle I inclus dans son ensemble de définition si et seulement si f est continue en tout a de I.

   b) Théorèmes généraux

Soient f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I. Alors :

* f + g est continue sur I ;

* kf où k est un réel non nul est continue su I ;

* fg est continue sur I ;

* Si de plus g est non nulle sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I ;

* Si f est continue sur I et g continue sur f(I), alors g o f est continue dur I.

   c) Exemples

- Toute fonction polynôme est continue sur ;
- Toute fonction rationnelle ou irrationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

4. **Théorème des valeurs intermédiaires**

   a) Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenu dans son ensemble de définition et soient a et b deux réels de I tels que a < b. Pour tout réel k entre f(a) et f(b) alors il existe au moins un réel $c \in [\![a; b]\!]$ tel que f(c) = k.

Autrement dit, pour tout k entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k admet au moins une solution dans $[\![a; b]\!]$.

b) Théorème du point fixe

Si f est continue sur I et que si f(I) ⊂ I, alors il existe au moins un réel x de I tel que $f(x_0) = x_0$.

Le point d'abscisse x_0 est appelé point fixe.

c) Théorème de bijection

Si f est continue et strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle J = f(I), alors pour tout k de J, il existe un et un seul x de I tel que f(x) = k.

Autrement dut, l'équation f(x) = k admet une solution unique dans I.

d) Corollaire

Si f est continue strictement monotone sur I = $[\![a; b]\!]$ et que f(a).f(b) < 0 alors l'équation f(x) = 0 admet une solution unique dans I.

e) Bijection

Si f est continue strictement monotone sur I alors f est bijective de I sur f(I).

L'application réciproque f^{-1} de f est aussi bijective de f(I) sur I et varie dans le même sens que f.

Les courbes C de f et C' de f^{-1} sont, dans le plan muni d'un repère orthonormé, symétriques par rapport à la première bissectrice des axes (la droite d'équation y = x).

***Auteur**: Mr Toavinkaja enseignant au lycée Andohalo*