

## 2 Calculs de limites

Pour calculer une limite, on change tout simplement la valeur de la variable par la valeur donnée.

Attention, l'un des résultats suivant est une forme indéterminée :  $\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ .

Les méthodes les plus courantes de lever l'indétermination est de :

- factoriser ou appliquer la règle de l'Hospital pour lever le  $\frac{0}{0}$  ;
- utiliser les fonctions équivalentes pour beaucoup de cas.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de  $x_0$  lorsque la limite de leur quotient vaut 1 quand x tend vers  $x_0$ . Dans les calculs de limites, on peut remplacer l'expression de f par celle de g. Notation  $f \sim g$ .

Règle de l'Hospital :

Soient N et D deux fonctions dérivables et f la fonction définie par  $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ . Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{0}{0}$  alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{N'(x)}{D'(x)} \text{ où } N' \text{ est la dérivée de } N \text{ et } D' \text{ la dérivée de } D.$$

Fonctions équivalentes

- Au voisinage de l'infini, un polynôme est équivalent à son terme du plus haut degré ;
- Au voisinage de zéro, un polynôme est équivalent à son terme du plus bas degré ;
- Au voisinage de zéro, on a :  $\sin x \sim x$  ;  $\tan x \sim x$  ;  $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$  ;  $\ln(1+x) \sim x$  ;  $e^x \sim 1+x$ .