De RAKOTOARIVONY ToavinkajaSoloarivelo Lycée Andohalo
Pour la classe de terminale C et D

Similitudes planes directes

1 – Transformation du plan

- C'est une application bijective du plan dans lui-même.
- L'application réciproque d'une transformation est une transformation de même nature.
- Le composé de deux transformations est une transformation.
- L'image d'un objet géométrique par une transformation est un objet géométrique de même nature.

2 – Similitude – Isométrie

- Toute transformation qui conserve les distances est une isométrie.
- Toute transformation qui multiplie la distance par son rapport est une similitude.

3– Exemples et caractéristiques de transformations

M(x ; y) ; M'(x' ; y') ; Ω(a ; b) trois points du plan. Δune droite du plan.
Si M' est l'image de M par la transformation S alors le couple (M ; M') est appelé **couple de points homologues**.

a) Symétrie centrale S_Ω

- M' = S_Ω (M)$\Leftrightarrow\Omega$ est le milieu de $[MM']$;
- S_Ω est caractérisé par son seul point invariant : son **centre ;**
- L'application réciproque de S_Ω est S_Ω lui-même.

b) Symétrie axiale S_Δ

- M' = S_Δ(M) $\Leftrightarrow$ Δ est la médiatrices de $[MM']$;
- S_D est caractérisé par son **axe** ;
- La réciproque de S_Δ est S_Δ lui-même.
- RQ : le compose de deux symétries est l'identité.

c) Translation $t_{\vec{u}}$

- $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
- M' = t$\vec{u}$(M) $\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$;
- Une translation est caractérisé par son **vecteur** $t_{\vec{u}}$;
- L'application réciproque de t_u est t_{-u} ;
- Le compose de deux translations est une translation $t_{u+u'}$.

d) Homothétie$h_{[\Omega,k]}$

- M' = $h_{[\Omega,k]}$(M) $\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$;
- Une homothétie est caractérisé par son **centre**Ω et son **rapport** k (k≠0 et k≠1) ;
- L'application réciproquede $h_{[\Omega,k]}\ est\ h_{\left[\Omega;\frac{1}{k}\right]}$.

e) Rotation $r_{[\Omega;\Theta]}$

- M' = $r_{[\Omega;\,\Theta]}$ (M) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M};\ \overrightarrow{\Omega M'}) = \Theta \end{cases}$;
- Une rotation est caractérisé par son **centre**Ω et son **angle**Θ ;
- L'application réciproque de $r_{[\Omega;\,\Theta]}$ *est* $r_{[\Omega;\,-\Theta]}$;
- Le compose de deux rotations n'est pas forcément une rotation.

4 – Similitudes planes directes $S_{[\Omega;k\,;\Theta]}$

- C'est le composé commutatif d'une homothétie et d'une rotation de même centre.
- Elle est caractérisée par son **centre**Ω, son **rapport** k et son **angle**Θ ;
- Son application réciproque est caractérisée par son **centre**Ω, son rapport $\frac{1}{k}$ et son angle $-\Theta$.

5 – Equation analytique d'une similitude plane

M(X ; Y) et M'(x' ; y'). On a $\boxed{S : \begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + f \end{cases}}$ avec $\boxed{k = \sqrt{a^2 + b^2}}$

$\boxed{\cos\Theta = \frac{x}{k} \text{ et } \sin\Theta = \frac{y}{k}}$ et Ω est le seul point vérifiant Ω = S(Ω).

6 – Equation complexe d'une similitude plane directe

M(z =x + yi) et M'(z' = x' + y'i), a et b deux nombres complexes connus.

On a : $\boxed{z' = az + b}$ avec $\boxed{k = |a|\ ,\ \Theta = \arg(a) \text{ et } \Omega(\omega = \frac{b}{1 - a})}$.

7 - Nature de S suivant les valeurs de

Si **a = 1** alors S est la **translation** de vecteur d'affixe b ;
Si **a réel différent de 0 et de 1**, alors S est l'**homothétie** de centre Ω et de rapport k = a ;
Si **a est un complexe tel que $|a| = 1$** alors S est la **rotation** de centre Ω et d'angle Θ;
Si **a est un complexe tel que $|a| \neq 1$** alors S est la **similitude plane directe** de centre Ω, de rapport k = $|a|$ et d'angle Θ = arg (a).

8 – Composition de deux similitudes planes directes

S : z' = az + b et S' : z' = a'z + b'.
SoS' : z'' = $az_{S'}$ + b = a(a'z + b') + b = aa'z + ab' + b.
S'oS : z'' = $a'z_S$ + b' = a'(az + b) + b' = a'az + a'b + b'.

9 – Equation d'une similitude définie par deux couples de points homologues

(A (z_a); A'($z_{a'}$)) et (B(z_b) ; B'($z_{b'}$)) deux couples de points homologues.

$$\left.\begin{array}{l} A' = S(A) \Leftrightarrow z_{a'} = az_a + b \\ B' = S(B) \Leftrightarrow z_{b'} = az_b + b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = \frac{z_{b'} - z_{a'}}{z_b - z_a} \text{ et } b = z_{a'} - a\, z_a}$$

10 - Exercices

Exercice 1 : Avec une règle, un compas et un crayon, construire les angles suivants : $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 2 : Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A(1 + 2i) , B(3 –5 i) et W(–1 – i).
1° Etablir l'expression complexe de chaque transformation suivante :
a) $t = t_{\vec{u}-2\vec{v}}$ b)$h = h_{[W;2]}$ c)$r = r_{\left[W;\frac{\pi}{3}\right]}$ d) $s_1 = r \circ h$ e) $s_2 = h \circ r$
f) f = t o r g) g = h o t h) r^{-1} i) t^{-1} j) h^{-1}
2° Déterminer les affixes des images de A et B par chacunedes transformations de la question précédente.

Exercice 3 :
1° ABCD est un carré de coté a tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. Construire son image par la similitude plane directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport a$\sqrt{2}$.
2° ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. Construire son image par la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.
3° ABC est un triangle rectangle en C et isocèle avec $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$. Construire l'image de B par la similitude directe de centre A, qui transforme C en B.
4° Construire l'image d'un rectangle ABCD vérifiant $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$par la similitude de centre A, qui transforme D en C.

Exercice 4 : ABC est un triangle rectangle en A vérifiant $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. [AH] est une hauteur. On considère la similitude de centre Hqui transforme A en B. Déterminer son rapport, son angle et l'image du point C.

Exercice 5 : ABCD est un carré de centre O avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On considère la similitude de centre D qui transforme O en C.
a) Déterminer son angle et son rapport.
b) Déterminer l'image du point A
c) Construire l'image du point C.

Exercice 6 : ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O ; h est une homothétie dont on donne le centre et le rapport ; r est une rotation dont on donne le centre et l'angle ; on note f = h o r et g = r o h.
Dans chacun des cas suivant :
- construire les images de A, B, C par f et g
- préciser la nature, l'angle et le rapport de f et g.
- si c'est possible sans calcul, préciser le centre de f et g.

a) $h_{[A;2]}$ et $r_{\left[B;\frac{\pi}{3}\right]}$ **b)**$h_{[A;-2]}$et $r_{\left[B:\frac{4\pi}{3}\right]}$**c**) $h_{[C;-1]}$ et $r_{\left[A;\frac{\pi}{3}\right]}$ **d**) $h_{[B;\sqrt{3}]}$ et $r_{[A;\pi]}$

Exercice 7 : f est l'application dans C par f(z) = z' = az + b. Dans chaque cas suivant, donner la nature et les éléments géométriques de f :

a) $z' = z + 2 - i$; b) $z' = z - 2i$; c) $z' = -2z + 3 - 4i$; d) $z' = 3z\sqrt{2}$;
e) $z' = -z - 1$; f) $z' = 4z - 1 + 3i$; g) $z' = (1 + i)z - i + 1$; h) $z' = (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3}$;
i) $z' = (1 - i\sqrt{3})z + I$; j) $z' = (2 - 2i)z + 1 - 5i$

Exercice 8: ABCD est un carré de sens direct et de centre O.I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [OB].

Identifier dans chaque cas la similitude directe S définie par :
a) S(A) = O ; S(B) = D b) S(A) = O ; S(I) = D
c) S(I) = C ; S(O) = D d) S(I) = J ; S(J) = O

Exercice 9: Dans le plan complexe, on considère les points A, B, A', B' d'affixes respectives $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 3 + 2i$; $z_1' = -1 +2i$; $z_2' = -3 +6i$

Déterminer l'application complexe z' = az+b associée à la transformation affine qui, au couple (A, B) fait correspondre le couple (A', B').

Quelle est la nature de cette transformation et quels en sont les éléments?

Exercice 10 : Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'application f, qui à tout point M(x ; y) fait correspondre le point M'(x' ; y') est définie par :

f : $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 3 \end{cases}$.

On pose z = x + yi et z' = x' + y'i les nombres complexes associée à ces points.

Exprimer z' en fonction de z. Montrer que f est une similitude plane directe que l'on précisera.

Exercice 11 : h est l'homothétie de centre W(-i) et de rapport $2\sqrt{2}$ et r est la rotation de centre W'(1) et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications S = h o r et S' = r o h. A-t-on S'= S ?

Exercice 12 : ABCD est un rectangle tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$, BC = 2 AB et D est le milieu de [AE]. I est le symétrique de A par rapportà (BD).

1° Construire A, B, C, D, E et I.

2° On considère la similitude directe S de centre I qui transforme B en D. Déterminer son angle, son rapport et l'image du point A.

3° Montrer que I, C et E sont alignés. Trouver l'antécédent de C par S.

4° Reprendre les questions précédentes en utilisant les nombres complexes.

Bac D 2009 : Le plan complexe ($\mathcal{P}$)est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$d'unité : 1cm

1) P est le polynôme de la variable complexe z défini par :

$P(z) = z^3 - (6+2i)z^2 + (10+8i)z - 4 - 8i$.

a) Calculer P(2) b) Résoudre dans C l'équation P(z) = 0

2) On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives a = 1 + i ; b = 2 ; c = 3 + i et d.

a) Calculer d pour que ABCD soit un carré

b) On considère la similitude plane directe S définie par son expression complexe : $z' = (1 + i) z + 4i$

- Donner les éléments caractéristiques de S
- Déterminer l'expression analytique de S

3) Construire dans le même repère ABCD et A'B'C'D' son image par S

Bac D 2010 : Le plan complexe ($\mathcal{P}$)est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ = $(O,\vec{u},\vec{v})$d'unité : 2 cm.

1° On considère les points S, R et D d'affixes respectives -4, 1 – i et 3i.

Représenter dans $\mathcal{R}$ l'image du triangle SRD par la similitude plane directe de centre R, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

2° Soit Ψ le nombre défini par $\Psi = \frac{z - 3i}{z + 4}$.

a) Interpréter géométriquement Ψ.

b) M étant le point d'affixe z, préciser la nature des ensembles (Δ) et (Σ) définis respectivement par (D) = {M(z) / |Ψ| = 1} et (Σ) = {M(z)/ argΨ= $\frac{\pi}{2}$ }. On justifiera que (Σ) ne passe pas par l'origine des axes.

c) Construire dans $\mathcal{R}$; (Δ) et (Σ).

3° On donne le polynôme Q, de la variable complexe z, défini par :
$Q(z) = z^4 - 3iz^3 + 8iz + 24$.

a) Calculer Q(3i). b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions de Q(z) = 0.

BacD 2011 :Soitl'équation (E) : $z^3 + (1 - i)z^2 + (-8 + 4i)z - 4 - 28i = 0$

1°) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure □i où □est un nombre réel que l'on déterminera.

2°) a- Montrer que (E) peut s'écrire sous la forme : (z – □i)(az² + bz + c) = 0 où a, b, c sont des nombres complexes à déterminer.

b- Résoudre dans C l'équation (E)

3°) Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, d'unité 1 cm, on donne les points A, B, et C d'affixes respectives □2i ; 3 + i et □4 + 2i .

a- Placer les points A, B, et C dans le plan (P).

b- On pose Z = $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ Ecrire Z sous forme trigonométrique

c- En déduire la nature du triangle ABC.

d- Trouver l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme

4°) Soit S la transformation d'expression complexe z' = $\frac{4}{3}$ iz□ $\frac{8}{3}$ □ 2i

a- Quelle est la nature de S et donner ses éléments caractéristiques.

b- Construire l'image A'B'C'D'de ABCD par S^{-1}

Bac D 2012 : 1) Calculer $(2 - i)^2$. En déduire la résolution dans C l'équation
(E) : $iz^2 - iz + 1 + i = 0$

2) Soit P le polynôme de variable complexe z définie par : $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$.

a) Montrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution réelle positive α que l'on déterminera.

b) Déterminer les nombres a et b tels que : P(z)= (z–1)(z–2–2i)(az+b)

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthogonal direct R = $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les trois points A,B et C, d'affixes respectives : 1 ; 2 + 2i et 1 – i .

a) Donner la forme trigonométrique de U = $\frac{2 + 2i}{1 - i}$

b) En déduire la nature du triangle OBC

4) Soit S la similitude plane directe telle que : $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$.

Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques.

Bac D 2015 : Soit f une transformation définie dans le plan complexe (P) qui, à tout point M d'affixe z associe le point m' d'affixe z' = f(z) = $\frac{iz - 5 + i}{z - 4}$.

1° a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Résoudre dans C l'équation f(z) = z.

2° Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 1 cm. On considère les points A, B, C et M'affixes respectives -2 + i, 1 – i, 3 + 2i et z.

a) Déterminer et construire l'ensemble (D) ={M(z)/ f(z) soit réel}

b) On pose $Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. Donner la forme trigonométrique de Z et en déduire la nature du triangle ABC.

3° Calculer l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un carré.

4° Soit S la similitudeplane directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et S(B) = C.

On note S : z' = az + b la forme complexe de S.

a) Donner la forme algébrique du nombre complexe a.

b) En déduire la valeur du nombre complexe b.

c) Préciser le centre de S.