Définitions

Fonction logarithme népérien

On appelle fonction logarithme népérien et on note *ln*

L'unique primitive de $x \to \frac{1}{x}$ *sur* $x \in R+*$ qui s'annule en $x = 1$.

Autrement dit :

- pour tout $x \in R+*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$;
- *ln(1)=0.*

Logarithme népérien d'un nombre réel strictement positif

Le logarithme népérien d'un nombre réel $x \succ 0$ est son image par la fonction logarithme népérien définie ci-dessus. On le note donc *ln(x).*

Logarithme népérien et exponentielle

On appelle fonction logarithme népérien, et l'on note *ln*, la bijection réciproque, de $]0;\infty[$ dans R, de la fonction *exp(x).*

Autrement dit :

- pour tout réel *x* strictement positif, le nombre réel *ln(x)* est caractérisé par :*exp(ln(x))=x* .

Ou encore :

- pour tout $y \in R$, $\ln(\exp(y)) = y$.

Étude de la fonction

- La fonction logarithme est définie et dérivable (donc continue) sur]0, +∞[et pour tout réel *x* strictement positif,

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

- Puisque cette dérivée est strictement positive, le logarithme est strictement croissant.
- Puisque cette dérivée est strictement décroissante, le logarithme est strictement concave.

- Les limites de la fonction aux bornes de son intervalle de définition sont :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

  C'est donc une bijection de]0, +∞[sur $\mathbb{R}$.

- Son nombre dérivé au point 1 (qui donne la pente de la tangente au graphe au point de coordonnées (1, 0)) est :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Propriété algébrique,

Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs :

- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
- $\forall r \in Q, \ln(a^r) = r \ln a$

Étude des limites

Les limites suivantes permettent de déterminer les croissances comparées du logarithme népérien et d'une fonction puissance quelconque :

$$pour\ tout\ réel\ \alpha \succ 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0 \ et \ \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

Dérivée logarithmique

Pour toute fonction réelle dérivable *u*, la fonction composée $ln \circ |u|$ (définie en tout point où *u* ne s'annule pas) est dérivable, de dérivée

$$(\ln \circ |u|)' = \frac{u'}{u}$$

Cette dérivée s'appelle la dérivée logarithmique de la fonction *u*. Elle représente une variation instantanée relative. C'est donc une mesure utile tant en économie qu'en calcul d'erreur. Elle permet d'autre part un calcul plus simple de la dérivée de fonctions données sous forme de produits, quotients ou puissances

Primitive

En appliquant la formule d'intégration par parties au produit des fonctions $\ln$ et $x \to 1$, on obtient :

$$\forall x \succ 0 \quad \int_1^x \ln(t)dt = x\ln(x) - x + 1$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, les primitives de *ln* sont donc les fonctions de la forme

$$, x \to x\ln x - x + k, k \in R$$

L a plus simple étant la fonction $x \to x\ln x - x$.

Logarithme de base *a*

On a vu que le logarithme népérien, aussi appelé logarithme naturel, présente la propriété suivante.

Propriété du logarithme naturel

- Pour tout $x \in R, \ln(\exp(x)) = x$ *ou bien* $x \in R, \ln(e^x) = x$
- *ln(e)=1*

Or, on rencontre souvent dans la nature des expressions semblables, mais n'utilisant pas la fonction exponentielle sous sa forme e^x.

Par exemple, en chimie, le pH est relié à la concentration en ions oxonium H_3O^+ par la relation $[H_3O^+] = 10^{-pH}$. Comment exprimer alors le pH en fonction de $[H_3O^+]$?

Définition

Soit $a \in \left]1, \infty\right[$. On appelle **logarithme de base *a*** et on note $\log_a$ la fonction définie sur

R_+^* par : $\quad \log_a : x \to \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Propriété du logarithme de base a

- Pour tout $x \in R, \log_a(a^x) = x$
- $\log_a(a) = 1$

Logarithme décimal

On appelle **logarithme décimal** le logarithme en base 10.

Il est souvent écrit **log** (au lieu de $\log_{10}$).

Étude de la fonction logarithme népérien

Etude de variation
Théorème

La fonction logarithme népérien est définie sur l'intervalle]0, +∞[, sur lequel elle est strictement croissante.

x	0	$+\infty$
Variation de *ln(x)*	→	

En effet, $\forall x \succ 0 \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \succ 0$.

Étude du signe

x	0	1	$+\infty$
Signe de *ln(x)*	-	0	+

En effet, *ln* est strictement croissante et s'annule en 1.

Étude des limites

Limite en +∞

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Limite en 0⁺

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Tableau de variations complet de la fonction ln

x	0 $\quad\quad$ 1 $\quad\quad$ $+\infty$
Signe de *ln(x)*	$+$
Variation de *ln(x)*	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Tangente remarquable

Propriété

Au point (*a, lna*), la tangente a pour équation $y = \ln(a) + \dfrac{1}{a}(x-a)$. En particulier au point (1,0), la tangente a pour équation $y = x - 1$.

La courbe est en dessous de toutes ses tangentes. En particulier :

$$\forall x \succ 0 \quad \ln(x) \leq x - 1,$$

l'inégalité étant même stricte si $x \neq 1$.

Courbe représentative