LES SUITES NUMERIQUES

1° Définitions :

a) Soit I un sous ensemble non vide de N. On appelle suite numériquetoute application de I dans R

b) On note u ou (u_n) ou $(u_n)_{n \in N}$ une suite numérique.

U_n est :

- le terme général de la suite u
- le terme de rang, ou d'indice n de la suite u

c) Une suite peut être déterminée par une formule explicite donnant u_n en fonction de n ou par la donnée du premier terme et une formule liant u_{n+1} et u_n, d'est de qu'on appelle forme récurrente.

d) Exemples : * (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in N, u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$

* (v_n) telle que $v_n = -6n^2 + n$

2° Variations :

a) Comme toute application, une suite peut être croissante, décroissante ou constante.

b) Pour déterminer les variations d'une suite, trois méthodes sont possibles selon la définition de la suite.

- Cas général

  Comparer, pour tout n, u_{n+1} et u_n.

- (u_n) est constante ou stationnaire à partir d'un certain ordre si $u_{n+1} - u_n = 0$
- (u_n) est croissante si $u_{n+1} - u_n > 0$
- (u_n) est décroissante si $u_{n+1} - u_n < 0$

- Si un = f(n)

  Etudier les variations de la fonction f

- (u_n) est constante si est constante
- (u_n) est croissante si f est croissante
- (u_n) est décroissante si f est décroissante.

- * Si (un) est une suite à termes tous positifs

  Comparer, pour tout entier n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

- (u_n) est constante si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$
- (u_n) est croissante si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
- (u_n) est décroissante si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

c) Exemples

Reprenons les deux exemples ci-dessus.

- Calculons $u_{n+1} - u_n$.

$U_{n+1} - u_n = 2u_n + 5 - u_n$

3° Convergence :

La convergence d'une suite est déterminée en étudiant la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$.

Si une suite admet une limite, cette limite est unique.

Une suite numérique est :

- convergente si elle admet une limite finie unique lorsque n tend vers $+\infty$.

- divergente dans les autres cas (pas de limite ou limite infinie)

4° Suite majorée, minorée, bornée

(u_n) majorée $\Leftrightarrow \exists\, M \in \mathbb{R} \,/\, \forall n,\ u_n \leq M$.

(u_n) minorée $\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{R} \,/\, \forall n,\ u_n \geq m$.

(u_n) bornée $\Leftrightarrow$ (u_n) est à la fois majorée et minorée $\Leftrightarrow \exists\, M > 0 \,/\, \forall\, n,\ |\, u_n \,| \leq M$.

5° Propositions

* Toute suite croissante majorée est bornée.
* Toute suite décroissante minorée est convergente.
* Si u, v et w vérifient pour tout entier n : $v_n \leq u_n \leq w_n$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = l \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

* Si u et v vérifient pour tout entier n : $v_n \leq u_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
* Si u et v vérifient pour tout entier n : $v_n \leq u_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Auteur *: RAKOTOARIVONY Toavinkaja Soloarivelo, enseignant au Lycée Andohalo, Classe de première et terminale*