Exercice 1 : Démontrer par récurrence les inégalités suivantes : $2^n > n$; $2^n > n^2 + 1$; $n \leq n!$; $n! \leq n^n$

Exercice 2 : Etablir la relation de récurrence et démontrer que cette relation est vraie pour tout entier n :

a) $S1(n) = 1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1) / 2$; et $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ en développant $(1+k)^3$

b) $S'_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$

Exercice 3 : (u_n) est une suite arithmétique définie par son premier terme u_1 et sa raison r

1 - Exprimer u_n en fonction de u_1 , n et r. En déduire r connaissant $u_p = a$ et $u_q = b$ $(p < q)$

Application numérique : on donne $u_3 = -2$, $u_7 = 26$ et $u_n = 187$. Calculer n.

2 – Plus généralement. Etant donnés 2 entiers naturels p et q $(p < q)$ et trois nombres a, b, c, quelle condition doivent satisfaire ces nombres pour qu'il existe un entier n tel que : $u_p = a$, $u_q = b$ et $u_n = c$?

Exercice 4 : (u_n) est une suite arithmétique. On donne $u_6 = 20$ et $u_{10} = 8$.

1 – Quelle est le sens de variation de (u_n) ? (u_n) est-elle convergente ou divergente ?

2 – Calculer u_n en fonction de n.

3 – Calculer la somme S_n des n premiers termes. Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n < -100$.

Exercice 5 : (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q $(q \neq o ; q \neq 1)$.

1 – Exprimer u_n à l'aide de u_1 q et n. En déduire la relation reliant deux terme u_p et u_n $p < n$.

2 – On donne $u_4 = 48$ et $u_8 = 3$. Calculer q et u_1.

3 – Calculer $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ puis sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 6 : (u_n) est une suite géométrique. On donne $u_2 = 4$ et $u_5 = -1/2$.

1 – Quelle est le sens de variation de (u_n) ? (u_n) est-elle convergente ou divergente ?

2 – Calculer u_n en fonction de n.

3 – Calculer la somme $S_n = u_4 + u_5 + \ldots + u_n$ et sa limite.

Exercice 7 : (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q $(q \neq o ; q \neq 1)$.

1 – a) On suppose qu $q = -1/2$. Démontrer que $\forall n \in N^* : u_{n+1} = (u_n + u_{n-1}) / 2$.

b) On suppose que (u_n) n'est pas constante et satisfait à $\forall n \in N^* : u_{n+1} = (u_n + u_{n-1}) / 2$. Démontrer que $q = -1/2$

2 – On suppose $q = -1/2$ et $u_0 = 16$ et on pose $S_n = u_4 + u_5 + \ldots + u_n$.

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $|S_n - 2/3| < 10^{-3}$.

Exercice 8 : (pour les tertiaires) Une personne a placé une somme S. A la fin de chaque année l'intérêt de ce placement est égal à 1/25 de la somme dûe au début de cette même année. Cette personne peut percevoir effectivement l'intérêt ou bien le laisser placé à son tour. En fait elle choisit cette seconde solution.

1 – Quelle somme lui est-il dûe à la fin de la deuxième année ? de la troisième année ? à la fin de la n-ième année, $n \in N$?

2 – Pendant combien d'année au moins lui faudra-t-il poursuivre son placement pour qu'il lui soit dûe une somme supérieure a 2S ? 3S ? 4S ?

Exercice 9 : (pour les BTP) On considère une suite de triangles ABC, $A_1B_1C_1$, …, $A_nB_nC_n$, chacun ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle précédant. On appelle S, S_1, …, S_n les aires de ces triangles.

1 – Calculer S_1, S_2, …, S_n en fonction de S supposée connue.

2 – Evaluer la somme $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ et déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 : 1 – On considère une suite arithmétique (u_n) définie par son premier terme u_1 et sa raison r. On forme la suite (v_n) par $v_1 = u_1 + u_2$ et pour tout $n \in N^*$, $v_n = u_n + u_{n+1}$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison. Exprimer v_n en fonction de u_1, n et r.

2 – On considère une suite géométrique (u_n) définie par son premier terme u_1 et sa raison q. On forme la suite (v_n) par

$v_1 = u_1.u_2$ et pour tout $n \in N^*$, $v_n = u_n.u_{n+1}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. Exprimer v_n en fonction de u_1, n et q.

Exercice 11 : a et b sont des réels donnés. On considère la suite (u_n) par la donnée de son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = a.u_n + b$.

1 – Etudier la suite pour a = 1.

2 – On suppose que $a \neq 1$.

a) Pour quelle valeur de u_0 la suite (u_n) est-elle constante ?

b) On pose $\forall n \in N$, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1 - a}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0 et n.

c) Etablir l'expression de u_n en fonction de u_0 et n en raisonnant par récurrence.

d) Retrouver ce résultat en étudiant la suite de terme général $w_n = u_{n+1} - u_n$.

e) Etudier la convergence de la suite (u_n).